

## ÖZET

Bozucu bastırma, maksimum üst aşım, yerleşme zamanı gibi performans isteklerinin kontrol sistemleri ile gerçekleştirilmesi için  $H^\infty$  kontrolcü tasarımı, kapalı çevrim kutupların yerlerine kısıt koyarak gerçekleştirilebilir. Standart  $H^\infty$  kontrol teorisine göre bu amaç doğrultusunda tasarlanan kontrolcü derecesinin en az sistem derecesinde olması gerekmektedir. Literatürde bu tipteki kontrolçülere tam dereceli kontrolçüler denmektedir. Bu tasarım kısıtından dolayı nihai kapalı çevrim sistemin derecesi iki kat artmaktadır. Endüstride mühendisler, yüksek dereceli sistemlerin, parametrelerinde olabilecek değişimlere karşı yüksek duyarlılığa sahip olmalarından ötürü tam dereceli kontrolçüleri kullanmaktan kaçınmaktadırlar. Ayrıca tam-dereceli kontrolçüleri gömülü sistemler ile gerçeklemek oldukça güçtür. Her ne kadar geleneksel yöntemler ile tasarlanan kontrolçüler, teoride düşük dereceli sistemler için gerçekleştirilebilir dursalarda, gerçek hayatta performans çıkışına konması muhtemel ağarlaştırılmış filtrelerden ötürü ki bu sistem derecesini arttıracaktır, mümkün değildir. Bundan dolayı, bilgisayar destekli sistemlerin kontrolünde ortaya çıkan önemli problemlerden biri sabit dereceli kontrolçülerin tasarımıdır.

Konveks yaklaşımlar ile sabit dereceli kontrolcü tasarlama önündeki başlıca zorluk, kapalı çevrim karakteristik çok terimlisine ait katsayıların oluşturduğu kararlılık bölgesinin genellikle konveks olmayan bir formda olmasıdır. Literatürde bu problemin üstesinden gelmek için iç ve dış konveks kestirim teknikleri kullanılmaktadır.

Literatürde kararlılık bölgesinin dış kestirimine yönelik özellikle global optimizasyon algoritmaları ile ilişkili oldukça fazla yaklaşım bulunmaktadır. Özel olarak DME gevşetmelerindeki Lasserre'in aşamalı yaklaşımı konveks olmayan gövdelere dış konveks kabuk bulmak için kullanılabilir ve yarı tanımlı olarak gösterilebilir bir tekniktir. Bu teknik momentlerin genelleştirilmiş problemdeki sonuçları kullanarak konveks olmayan bölgenin konveks kabuğuna asimptotik olarak yakınsayacak aşamalı yöntemi ortaya koymaktadır. Ancak, dış kestirim sadece kararlılık üstündeki gereklilik koşulunu sağlamaktadır. Oysa ki iç kestirim yaklaşımı yeterlilik koşulunu gerçeklemektedir.

İç kestirim konusundaki son yirmi yıldaki gelişmelerin ana ve genel amacı elde edilen bölgenin en büyük hacimli olmasını sağlamaktır. Konveks iç kestirim teknikleri içerisinde en az tutucu olanı DME bölgelerini, kesin pozitif gerçel lemma'nın yardımı ile oluşturarak kullanılmaktadır. Bu tekniğe göre kestirilen bölgenin geometrisi merkezi çok terimlinin pozisyonuna çok bağlıdır. Bu güçlü bağlı olma durumuna karşın henüz konveks bölgenin geometrisi ile merkezi çok terimlinin katsayıları arasındaki ilişkiyi tam kapalı formda ortaya koyan bir gösterim bulunmamaktadır. Eğer bu ilişki açıkça ortaya konabilirse, tasarımdaki tutuculuk etkisi azaltılabilir. Tekniklerin tutuculuklarını kestirilen bölgelerin hacimleri cinsinden ölçülebiliriz. Konveks bölge, politop olduğunda tam hacmi

hesaplamak için üçgenleme, işaret ayrışımı ve hibrit metotlar gibi teknikler bulunmaktadır. Bu teknikler politopların sonlu sayıda köşeye sahip olması gerçeğini kullanmaktadırlar. Bildiğimiz en iyi yaklaşık konveks bölge hacmi hesaplama algoritması, rastlantısal artımsal algoritmadır. Bu tipteki algoritmaların doğruluğu konveks bölge sınırındaki örnekleme noktaları ile direk bağlantılıdır. Bundan dolayı konveks bölge geometrisi açık bir gösterim ile ortaya konabilir ise bu algoritmalar her zamankinden daha verimli çalışacaktır.

Bu projede, iki boyutlu konveks bölgelerin alanını destek fonksiyonları cinsinden hesaplanmasına imkân sağlayan kapalı formdaki gösterim, karışık hacimler teorisi kullanılarak ortaya konacaktır. Ayrıca iki ve üç boyutlu konveks bölgelerin geometrisine ait kapalı formdaki gösterimler de dual eğriler ve hesaplamalı cebir kullanılarak ortaya konacaktır. Çalışmanın ana katkısı konveks gövdenin kenarlarına ait denklemin merkezi çok terimlinin katsayıları cinsinden elde ederek, sabit dereceli kontrolcü tasarımıdaki tutuculuğu azaltmak için uygun merkezi çok terimlinin bulunmasına imkân sağlamaktır.

Sabit dereceli kontrolcü tasarımı tekniğindeki tutuculuk etkisinin azaltılmasının yanında bu proje ile en az tutucu alt-optimal  $H^\infty$  kontrolcünün PID kazanç değerlerinin hesaplanmasına yönelik bir strateji ortaya konacaktır.

#### ABSTRACT

In order to achieve desired performance for any dynamic system such as disturbance rejection, maximum overshoot, settling time, etc. we can use the  $H^\infty$  control with the constraint on the location of the system's poles. In the standard  $H^\infty$  control theory, the designed controller has the same order as the system, called as full-order controller in literature. As a result of this designing constraint, the degree of the closed loop system is increased twofold. In the industry, the engineers avoid to use the full-order controllers due to their high sensitivity on changes of system's parameters. Furthermore, the usage of the full-order controllers that obtained by using conventional methods, is not an easy work to accomplish in the embedded system. Although conventional methods are seem to be feasible in theory for low order systems, it may not be easy in real life due to necessity of the weighted filters located at the performance outputs, so this increases the degree of the system. As a matter of this fact, the design problem of fixed-order controller for computer-aided systems is one of the most challenging topics for control engineers.

The main difficulty in the development of fixed-order controllers based on the convex approaches is that the associated stability region in the space of coefficients of the closed-loop characteristic polynomial is non-convex in general. In order to cope with this problem, inner and outer convex approximation techniques are used. The literature is abounded with various of approaches for the outer approximation of the stability region which are mostly related with global optimization algorithms. In particular, Lasserre's hierarchy of Linear Matrix Inequality (LMI) relaxations can be used to find outer approximated region for nonconvex sets which are semi-

definite representable. This technique provides asymptotic convergence to a convex hull of non-convex region by the help of the results on generalized problems of moments. However, unlike the inner approximation techniques which provide sufficient conditions, the outer approximations can only provide the necessary condition on the stability.

In the last two decades, the main and common aims of developments on inner approximation is to achieve an approximated region having the maximum volume. Among all the convex inner approximation techniques, the least conservative one uses LMI regions by the help of the well-known strict Positive Real Lemma. According to this technique, the geometry of approximated region is extremely dependent on the location of the central polynomial. Despite this strong dependence, there is no explicit closed-form expression which shows the relation between the geometry of convex region and the coefficients of the central polynomial. If this relation can be shown explicitly, the conservatism on design can be reduced. The conservatism of techniques can be measured with volume of approximated region. When the convex region is defined as a polytope, there are some exact methods to calculate the volume such as triangulation, signed decomposition and hybrid methods, using the fact that the polytopes have finite numbers of vertices. To the best of our knowledge, the randomized, incremental algorithms have been used to calculate the volume of convex region roughly. The accuracy of this kind of algorithms hinge on the sampling point over the boundary of convex region. Therefore it can be more efficient than ever when the geometry of convex body have explicit expression.

In this project, we propose an explicit closed-form expression for the computation of volume of the planar (2D) convex regions, using their support functions by the help of mixed volume theorem. Also we propose an explicit closed-form expression for the geometry of 2D and 3D convex regions, using the properties of dual curves and tools of computational algebra. The main contribution of our work is deriving the explicit equation of convex body's edges in terms of coefficients of the central polynomial which gives opportunities to find adequate central polynomial for the problem and to reduce the conservatism of fixed order controller.

In addition to reducing the conservatism on the design technique of fixed order controller, this project also shows a strategy to tune the gains of PID controller for achieving the least conservative robust sub-optimal  $H^\infty$  controller.